Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

OBS: Maxpoäng per uppgift ändrades i början av 2018 från 3p till 6p. Alla ev tidigare resultat (inkl bonus) med den gamla maxpoängen multipliceras därför med en faktor 2 vid uträkning av betyg på kursen.

Tid och plats: Onsdagen den 18 augusti 2021 klockan 08.30-11.30, **hemtenta**.
Hjälpmedel: Alla hjälpmedel tillåtna
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran. **Ställl privata frågor på Piazza, som jag besvarar och lägger in i en FAQ på Piazza. Kolla därför i FAQn innan ni ställer frågor ifall de redan besvarats.**

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, ..., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

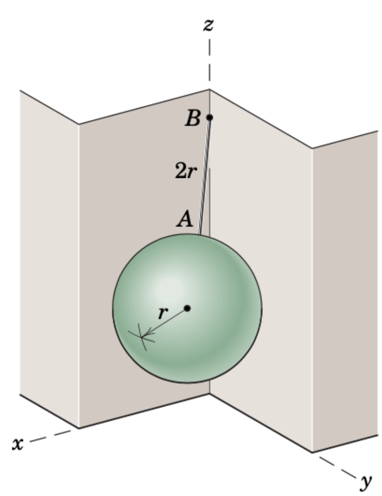
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Via Zoom, tid meddelas senare via Canvas.

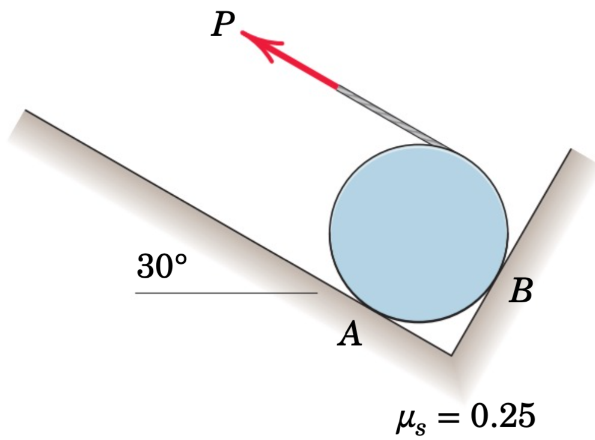
Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får, om inget annat sägs, svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren samt tyngdaccelerationen g.

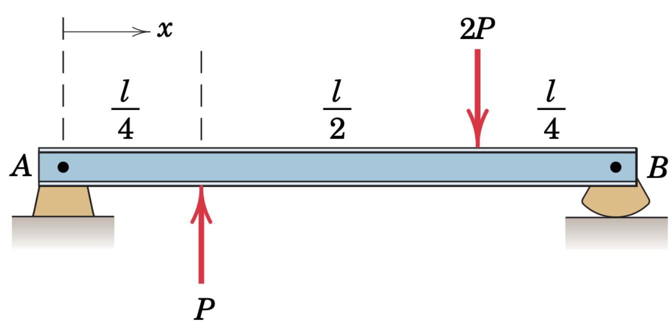
1. Ett glatt homogent klot med massan m och radien r är upphängt i ett (masslöst) snöre AB, med längden $2r$, från punkten B längs den vinkelräta skärningslinjen mellan två glatta vertikala väggar, se figur. Bestäm krafterna från båda väggarna på klotet vid jämvikt.



2. En homogen cirkulär skiva med massan m vilar på de rätvinkliga ytorna enligt figuren. Spänningen P i snöret ökas sakta från noll. Om friktionskoefficienten vid båda kontaktpunkterna A och B ges av $\mu_s = 0.25$, vad händer först – börjar skivan glida på stället, eller börjar den rulla uppför det lutande planet? Bestäm även värdet på P då den första rörelsen sker. **OBS: För att avgöra om glidning eller rullning sker först kan du behöva jämföra två uttryck numeriskt.**



3. Rita skjuv- och momentdiagram för baken i figuren, vilken belastas med två punktkrafter. Bestäm även storlek och position för det maximala böjmomentet M_{max}.



Lycka till!

1

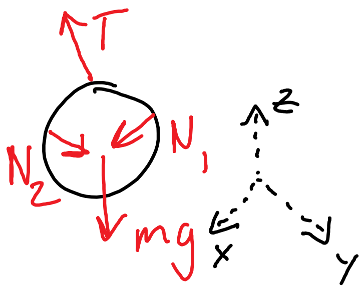
Sökt: Krafter från väggarna (N_1, N_2)

Givet: m, r

Plan: Frilägg + kraftjämvikt

Lösning:

Frilägg:



där $\vec{N}_1 = N_1 \hat{x}$, $\vec{N}_2 = N_2 \hat{y}$,

$$\vec{T} = T \frac{(-r, -r, h)}{\sqrt{r^2+r^2+h^2}}$$

där h ges av $r^2+r^2+h^2 = (3r)^2 \Rightarrow h = \sqrt{7}\, r$

$$\Rightarrow \vec{T} = \frac{T}{3}\left(-1, -1, \sqrt{7}\right)$$

Kraftekvationer:

$$x: \quad N_1 - \frac{T}{3} = 0 \quad \Rightarrow N_1 = \frac{T}{3}$$

$$y: \quad N_2 - \frac{T}{3} = 0 \quad \Rightarrow N_2 = \frac{T}{3}$$

$$z: \quad \sqrt{7}\,\frac{T}{3} - mg = 0 \quad \Rightarrow \frac{T}{3} = \frac{mg}{\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow N_1 = N_2 = \frac{mg}{\sqrt{7}}$$

Kontroller: enhet ok $[mg] = N$ ✓

$N_1 = N_2$ som väntat (symmetriskt)

Svar: Krafterna från väggarna är båda

$$N = \frac{mg}{\sqrt{7}},$$

vinkelrätt utåt.

2

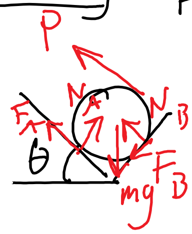
den 16 augusti 2021

Sökt: Rullning eller glidning, Kritiskt P

Givet: $\mu_s = 0{,}25$, $\theta = 30°$

Plan: Frilägg, Kraft och momentjämvikt, Glidvillkor

Lösning: Frilägg och ställ upp jämviktsekvationer.



$$\nwarrow: \quad F_A + N_B + P - mg\underbrace{\sin 30°}_{\frac{1}{2}} = 0 \qquad (1)$$

$$\nearrow: \quad N_A - F_B - mg\underbrace{\cos 30°}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 0 \qquad (2)$$

$$\curvearrowleft C: \quad rP - rF_A - rF_B = 0 \qquad (3)$$

centrum

Om rullning så lättar cylindern vid B, d.v.s. $F_B = N_B = 0$

(3) ger då $F_A = P$ och (1)

att $2P - mg\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow P = \frac{1}{4}mg \simeq 0{,}25mg$

Om istället glidning har vi maximal friktion i både A och B

$$\Rightarrow F_A = \mu_s N_A = \frac{1}{4}N_A \quad \text{och} \quad F_B = \mu_s N_B = \frac{1}{4}N_B$$

Insatt i (1), (2) och (3) får vi

$$\begin{cases} \frac{1}{4}N_A + N_B + P = \frac{1}{2}mg \\ N_A - \frac{1}{4}N_B = \frac{\sqrt{3}}{2}mg \\ P - \frac{1}{4}(N_A + N_B) = 0 \quad \Rightarrow N_A = 4P - N_B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2P + \frac{3}{4} N_B = \frac{1}{2} mg \\ 4P - \frac{5}{4} N_B = \frac{\sqrt{3}}{2} mg \end{cases} \qquad \Rightarrow N_B = \frac{2}{3} mg - \frac{8}{3} P$$

$$\Rightarrow \quad 4P + \frac{5}{4}\frac{8}{3} P = \frac{\sqrt{3}}{2} mg + \frac{5}{4}\frac{2}{3} mg$$

$$\Rightarrow P = mg \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{6}\right)}{4 + \frac{10}{3}} = mg \frac{\left(3\sqrt{3} + 5\right)}{44} \approx 0{,}23\, mg$$

Så nu återstår att avgöra vilken som sker. $0{,}23 < 0{,}25$ och alltså skulle den börja glida innan den rulla

Kontroller: $[P] = [mg] = N$, ok

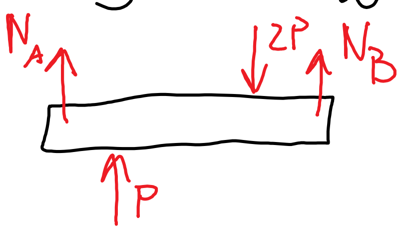
Svar: Cylindern kommer att börja glida först. Detta sker vid $P = 0{,}23\, mg$.

Sökt: $V(x)$, $M(x)$, M_{max}, diagram

Givet: P, ℓ

Plan: Frilägg + snitt + kraft/momentjämvikt

Lösning: Frilägg först hela balken



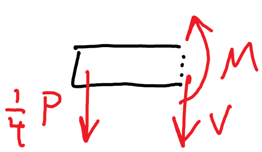
$$\uparrow: \; N_A + N_B + P - 2P = 0 \Rightarrow N_A = P - N_B$$

$$\curvearrowleft(A): \; \frac{\ell}{4}P - \frac{3\ell}{4}2P + \ell N_B = 0 \Rightarrow N_B = \frac{5}{4}P$$

$$\Rightarrow N_A = -\frac{1}{4}P$$

Gör ett snitt vid x. Tre fall:

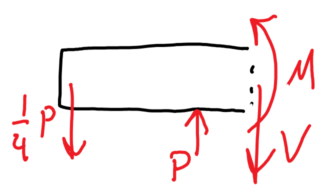
① $0 < x < \frac{\ell}{4}$



$$\uparrow: \; -V - \frac{1}{4}P = 0 \Rightarrow V = -\frac{1}{4}P$$

$$\curvearrowleft(A): \; -xV + M = 0 \Rightarrow M = xV = -\frac{1}{4}xP$$

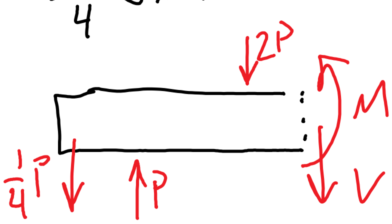
② $\frac{\ell}{4} < x < \frac{3\ell}{4}$



$$\uparrow: \; -V - \frac{1}{4}P + P = 0 \Rightarrow V = \frac{3}{4}P$$

$$\curvearrowleft(A): \; -xV + M + \frac{\ell}{4}P = 0 \Rightarrow M = \frac{3}{4}xP - \frac{1}{4}\ell P$$

③ $\frac{3\ell}{4} < x < \ell$

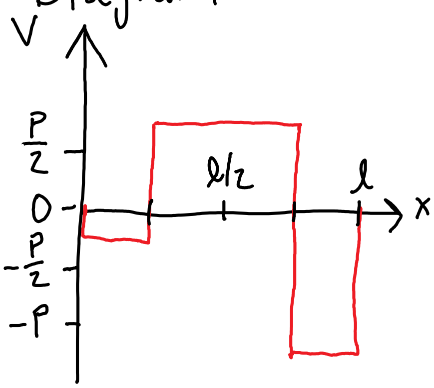


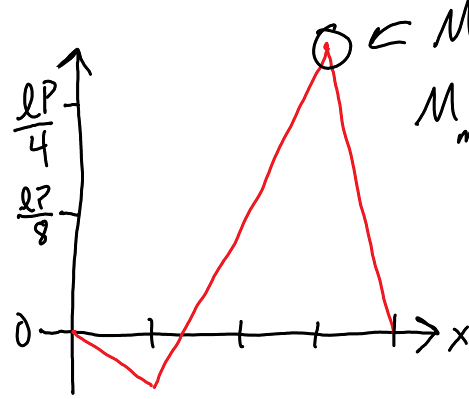
$\uparrow: -V - \frac{1}{4}P + P - 2P = 0 \Rightarrow V = -\frac{5}{4}P$

$\circlearrowleft A): -xV + M + \frac{l}{4}P - \frac{3l}{4}2P = 0 \Rightarrow M = -\frac{5}{4}xP + \frac{5}{4}lP$

$$V(x) = \frac{P}{4} \cdot \begin{cases} -1 & : 0 < x < \frac{l}{4} \\ 3 & : \frac{l}{4} < x < \frac{3l}{4} \\ -5 & : \frac{3l}{4} < x < l \end{cases} \qquad M(x) = \frac{P}{4} \cdot \begin{cases} -x & : 0 < x < \frac{l}{4} \\ 3x - l & : \frac{l}{4} < x < \frac{3l}{4} \\ -5x + 5l & : \frac{3l}{4} < x < l \end{cases}$$

Diagram





← Maximalt värde

$M_{max} = M\left(\frac{3l}{4}\right)$

$= \frac{P}{4} \cdot \left(\frac{9}{4}l - l\right)$

$= \frac{5}{16} lP$

Kontroller: $[V] = [P] = N$, bra

$[M] = [lP] = Nm$, bra

Diskontinuiteter i V motsvaras av punktkrafter, bra.

M och V relaterade via en derivata, bra!

Svar: Diagram av skjuvkraften V och böjmomentet M synsi figurer ovan. Maximalt böjmoment blir vid $x = \frac{3l}{4}$,

$M_{max} = \frac{5}{16} lP$.